Sustituyendo las coordenadas del punto (4, 6), $(6 - 4\sqrt{3})(6 + 4\sqrt{3}) = C = -12$.

Luego la ecuación pedida es $(y - \sqrt{3}x)(y + \sqrt{3}x) = -12$, o bien, $3x^2 - y^2 = 12$.

Definición. Dos hipérbolas son *conjugadas* si los ejes real e imaginario de una de ellas son, respectivamente, el imaginario y real de la otra. Para hallar la ecuación de la hipérbola conjugada de una dada no hay más que cambiar en ésta los signos de los coeficientes de x^2 e y^2.

12. Deducir la ecuación de la hipérbola conjugada de $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Hallar las ecuaciones de las asíntotas y las coordenadas de los focos de ambas hipérbolas.

La ecuación de la hipérbola conjugada es $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

En las dos hipérbolas, $c = \sqrt{9 + 16} = 5$. Luego las coordenadas de los focos de la hipérbola dada son $(\pm 5, 0)$, y los de la conjugada $(0, \pm 5)$.

Las ecuaciones de las asíntotas, $y = \pm \dfrac{4}{3}x$, son las mismas para las dos hipérbolas.

13. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuyo producto de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos fijos $(-2, 1)$ y $(4, 5)$ es igual a 3.

$\left(\dfrac{y - 1}{x + 2}\right)\left(\dfrac{y - 5}{x - 4}\right) = 3$. Simplificando, $3x^2 - y^2 + 6y - 6x - 29 = 0$, una hipérbola.

14. Demostrar que la diferencia de las distancias del punto $\left(8, \dfrac{8\sqrt{7}}{3}\right)$ de la hipérbola $64x^2 - 36y^2 = 2.304$ a los focos es igual a la longitud del eje real. Estas distancias son los radios focales del punto.

Escribiendo la ecuación en la forma $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$. Por tanto, $c = \pm\sqrt{36 + 64} = \pm 10$.

La longitud del eje real es $2a = 12$.

Las diferencias de las distancias del punto $\left(8, \dfrac{8\sqrt{7}}{3}\right)$ a los focos $(\pm 10, 0)$ es

$$\sqrt{(8 + 10)^2 + \left(\frac{8\sqrt{7}}{3} - 0\right)^2 - (8 - 10)^2 + \left(\frac{8\sqrt{7}}{3} - 0\right)^2} = \frac{58}{3} - \frac{22}{3} = 12.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar *a*) los vértices, *b*) los focos, *c*) la excentricidad, *d*) el *latus rectum*, y *e* las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas siguientes:

(1) $4x^2 - 45y^2 = 180$; (2) $49y^2 - 16x^2 = 784$; (3) $x^2 - y^2 = 25$.

Sol. (1) *a*) $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$; *b*) $(\pm 7, 0)$; *c*) $\dfrac{7\sqrt{5}}{15}$; *d*) $\dfrac{8\sqrt{5}}{15}$; *e*) $y = \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{15}x$.

(2) *a*) $(0, \pm 4)$; *b*) $(0, \pm\sqrt{65})$; *c*) $\dfrac{\sqrt{65}}{4}$; *d*) $\dfrac{49}{2}$; *e*) $y = \pm \dfrac{4}{7}x$.

(3) *a*) $(\pm 5, 0)$; *b*) $(\pm 5\sqrt{2}, 0)$; *c*) $\sqrt{2}$; *d*) 10; *e*) $y = \pm x$.

2. Hallar las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen las condiciones siguientes:

a) Eje real 8, focos $(\pm 5, 0)$. *Sol.* $9x^2 - 16y^2 = 144$.
b) Eje imaginario 24, focos $(0, \pm 13)$. *Sol.* $144y^2 - 25x^2 = 3.600$.
c) Centro $(0, 0)$, un foco $(8, 0)$, un vértice $(6, 0)$. *Sol.* $7x^2 - 9y^2 = 252$.

3. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los dos puntos fijos $(0, 3)$ y $(0, -3)$ sea igual a 5. *Sol.* $44y^2 - 100x^2 = 275$.

4. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(0, 6)$ sea igual a $3/2$ de la correspondiente a la recta $y - 8/3 = 0$. *Sol.* $5y^2 - 4x^2 = 80$.

5. Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, eje real sobre el eje de coordenadas y, longitud del *latus rectum* 36 y distancia entre los focos igual a 24. *Sol.* $3y^2 - x^2 = 108$.

6. Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, eje real sobre el eje de coordenadas y, excentricidad $2\sqrt{3}$ y longitud del *latus rectum* igual a 18. *Sol.* $121y^2 - 11x^2 = 81$.

7. Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, ejes sobre los de coordenadas y que pase por los puntos $(3, 1)$ y $(9, 5)$. *Sol.* $x^2 - 3y^2 = 6$.

8. Hallar la ecuación de la hipérbola de vértices $(\pm 6, 0)$ y asíntotas $6y = \pm 7x$.
Sol. $49x^2 - 36y^2 = 1.764$.

9 Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancia a los puntos fijos $(-6, -4)$ y $(2, -4)$ sea igual a 6. *Sol.* $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y+4)^2}{7} = 1$.

10. Hallar las coordenadas de *a*) el centro, *b*) los focos, *c*) los vértices, y *d*) las ecuaciones de las asíntotas, de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$.
Sol. *a*) $(2, -1)$; *b*) $(7, -1), (-3, -1)$; *c*) $(6, -1), (-2, -1)$; *d*) $y + 1 = \pm \frac{3}{4}(x - 2)$.

11. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos fijos $(-2, 1)$ y $(3, 2)$ es igual a 4, representa una hipérbola.
Sol. $4x^2 - y^2 - 4x + 3y - 26 = 0$.

12. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a las rectas $3x - 4y + 1 = 0$ y $3x + 4y - 7 = 0$ sea $144/25$. ¿Qué curva representa dicho lugar?
Sol. $9x^2 - 16y^2 - 18x + 32y - 151 = 0$. Hipérbola.

13. Hallar la ecuación de la hipérbola de centro $(0, 0)$, un vértice en $(3, 0)$ y ecuación de una asíntota $2x - 3y = 0$. *Sol.* $4x^2 - 9y^2 = 36$.

14. Hallar la ecuación de la hipérbola conjugada a la del Problema 13. *Sol.* $9y^2 - 4x^2 = 36$.

15. Dibujar las hipérbolas siguientes y hallar sus puntos de intersección.

$$x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0,$$

$$3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0.$$

Sol. $(1, 1), (1, 3), (-2, 1), (-2, 3)$.

16. Demostrar que la diferencia de distancias del punto $\left(6, \dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ a los focos es igual a la longitud del eje real. Estas distancias son los radios focales del punto.